la Fley 22 22-4-'52.

AFDELING BEWERKING WAARNEMINGSUITKOMSTEN
van de
CENTRALE ORGANISATIE VOOR TOEGEPAST NATUURWETENSCHAPPELIJK ONDERZOEK

Mededeling Nr. 1

Het aanpassen van Mitscherlich krommen

Probleem.

Gegeven: de reeks waarnemingsuitkomsten van een proefveld; x = bemesting, y = opbrengst; gegeven verder vele proefvelden.

Gevraagd: voor elk proefveld afzonderlijk het verband tussen y en x te benaderen door het aanpassen van een kromme van de vorm $y = a + b\,10^{-cx}$, a, b en c zijn parameters.

Oplossing.

a) Methode.

Uitgaande van een gekozen waarde van de parameter c, kunnen de beste schattingen van de bij die c-waarde behorende parameters a en b als volgt eenvoudig worden bepaald.

Kies $c = c'$.

Stel vervolgens $10^{-c'x} = t$, dan kan bij iedere waarde van x een bijbehorende waarde van t worden berekend. Het bepalen van de parameters a en b komt dan neer op het berekenen van een lineaire regressievergelijking:

$$y = a + bt.$$

Teneinde de aanpassing van de zo gevonden kromme te kunnen beoordelen, wordt de grootheid $\Sigma(O - C)^2$ berekend, d.i. de som van de kwadraten der afwijkingen van de waargenomen punten t.o.v. de beschouwde Mitscherlich-kromme ').

Door deze berekeningen voor een aantal waarden van c uit te voeren, kan de beste schatting van de parameter c worden verkregen als die c-waarde, waarbij $\Sigma(O - C)^2$ minimaal is. Tevens zijn dan de bij die c-waarde behorende waarden van

') O = "observed", C = "computed".

de parameters a en b bekend.

Wellicht ten overvloede is op te merken, dat bij deze methode wordt afgeweken van de grondgedachte van Mitscherlich, die er immers van uitgaat, dat c voor elke meststof een absolute constante is.

b) Practische uitvoering.

Daar $\Sigma(O - C)^2 = \Sigma(y - \bar{y})^2 - \frac{\{\Sigma(y - \bar{y})(t - \bar{t})\}^2}{\Sigma(t - \bar{t})^2}$

en $\Sigma(y - \bar{y})^2$ voor een bepaald proefveld constant is (onafhankelijk van de keuze van c), kan, teneinde de c-waarde te vinden, waarvoor $\Sigma(O - C)^2$ minimaal is, worden volstaan met het bepalen van de c-waarde waarvoor:

$$U^2 = \frac{\{\Sigma(y - \bar{y})(t - \bar{t})\}^2}{\Sigma(t - \bar{t})^2}$$

maximaal is, dus de c-waarde, waarvoor

$$|U| = \left|\frac{\Sigma(y - \bar{y})(t - \bar{t})}{\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}}\right|$$

maximaal is.

Nu is $\Sigma(y - \bar{y})(t - \bar{t}) = \Sigma y(t - \bar{t}) - \bar{y}\Sigma(t - \bar{t}) =$

$\Sigma y(t - \bar{t}) - \bar{y}.0 = \Sigma y(t - \bar{t})$,

zodat

$$U = \frac{\Sigma y(t - \bar{t})}{\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}}$$

Voor een bepaalde waarde van c is $\Sigma(t - \bar{t})^2$ een bekende grootheid, zodat uiteindelijk:

$$U = \Sigma y \frac{(t - \bar{t})}{\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}}$$

Er is nu gedacht aan een oplossing door middel van ponskaartentechniek. Van een bepaalde reeks x-waarden kan een zgn. functiekaartsysteem worden gemaakt, waarin voor een reeks waarden van c de grootheden $\frac{t - \bar{t}}{\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}}$ zijn opgenomen; deze waarden volgen dus voor elke waarde van c het "patroon" van x, dat voor de proeven is gebruikt. Is een dergelijk functiekaartsysteem voorhanden, dan behoeft, teneinde bij een gegeven waarnemingsreeks de best aangepaste Mitscherlich-kromme te vinden, slechts het volgende te worden gedaan:

1) de grootheden y worden verponst,
2) voor een reeks waarden van c worden de grootheden $|U|$ d.m.v. de ponskaarten-apparatuur berekend,
3) bij de c-waarde, waarvoor $|U|$ maximaal blijkt, worden in de rekenkamer nog de grootheden a en b berekend:

$$b = \frac{\Sigma y(t - \bar{t})}{\Sigma(t - \bar{t})^2} = \frac{U}{\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}} ;$$

$$a = \bar{y} - b\bar{t} = \frac{\Sigma y}{n} - b\bar{t}.$$

Door dus tevens nog de grootheden $\frac{1}{\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}}$ en $\bar{t}$ in het functiekaartsysteem op te nemen en door de machine, die $|U|$ berekent, mede te laten uitschrijven, wordt bereikt, dat voor de berekening van de parameters a en b, behorende bij de c-waarde, waarvoor $|U|$ maximaal is, alle noodzakelijke gegevens direct naast elkaar staan.

De machinale berekening van de gevraagde c-waarde is intussen slechts dan rendabel, wanneer voor een aantal proefvelden (minstens 10) kan worden volstaan met het maken van één functiekaartsysteem; dit eist dus, dat voor deze proefvelden het bemestingspatroon gelijk is en bijv. als volgt:

Proefveld 1: 0 - 40 - 80 - 160 - 200
Proefveld 2: 0 - 10 - 20 - 40 - 50
Proefveld 3: 0 - 15 - 30 - 60 - 75
Proefveld 4: 0 - 25 - 50 - 100 - 125 etc.

Essentieel hierbij is dus, dat al deze bemestingshoeveelheden, afgezien van een schaalfactor, bij de berekening van de Mitscherlich-krommen kunnen worden vervangen door één stel x-waarden, hier 0 - 1 - 2 - 4 - 5. De gewassen en de mestsoorten in de afzonderlijke proeven behoeven vanzelfsprekend niet dezelfde te zijn.

Het kan dus zijn, dat, teneinde de machinale methode mogelijk te maken, reeds bij de opzet der proeven daarmede moet worden rekening gehouden door één bepaald bemestingspatroon te kiezen of althans de noodzakelijk geachte patronen tot enkele typen te beperken. Het lijkt geenszins onmogelijk dit te doen, aangezien het hoofddoel van de aanpassing van de Mitscherlichkromme is het leren kennen van de waarde der parameters, vnl. van a. Het is daarbij van weinig belang welk bemestingspatroon wordt gekozen, mits het slechts de optimale voorwaarden schept voor de berekening van de parameters der kromme.

Appendix.

Voor hen, die daarvoor belangstelling mochten hebben, wordt hieronder verklaard hoe het ponskaartentechnische deel van het werk van de aanpassing van de Mitscherlich-kromme aan de waarnemingen van een groter aantal proeven zou verlopen. Men zal opmerken, dat een vlot rekenproces ontstaat.

Er wordt een stelsel ponskaarten gemaakt met de y-waarden van de proefvelden. De indeling van deze ponskaart is in principe als volgt:

Proefveldkaart.

Veld-no. 1)	Omschrijving	2)	Kolommen 3) Aantal	Nrs
1	Bemestingspatroon (code)	p	1	1
2	Schaalfactor	p	3	2/4
3	Proefveldnummer	p	3	5/7
4	y_1	p	3	8/10
5	y_2	p	3	11/13
6	y_3	p	3	14/16
7	y_4	p	3	17/19
8	y_5	p	3	20/22
9	eventueel enz.	p		
10	blanco			
11	kaartsoort (1)	p	1	78
12	A.B.W. - nr.	p	2	79/80

1) In de ponskaartentechniek wordt een combinatie van kolommen der ponskaart, tezamen één begrip dienende, veld of zône genoemd.
2) Wijze, waarop het gegeven in de kaart terecht komt; p = primair ingeponst; r = door rekenende machine ingeponst.
3) De getallen in deze twee kolommen worden slechts als voorbeeld gegeven.

De opbrengsten van één proefveld komen dus naast elkaar op één ponskaart.

Vervolgens is er een stel functiekaarten, tevens dienende als resultaat-kaarten.

Functie-resultaat-kaart.

Veld-no.	Omschrijving	2)	Kolommen Aantal	Nrs.
1	Bemestingspatroon (code)	p	1	1
2	Schaalfactor	p	3	2/4
3	Proefveldnummer	p	3	5/7
4	T_1	p	3	8/10
5	T_2	p	3	11/13
6	T_3	p	3	14/16
7	T_4	p	3	17/19
8	T_5	p	3	20/22
9	eventueel enz.	p		
10	$1/\sqrt{\Sigma(t-\bar{t})^2}$	p	4	
11	$\bar{t}$	p	3	
12	c_j	p	2	
13	$\Sigma\, T_i y_i = U$	r		
14	blanco			
15	kaartsoort (2)	p	1	78
16	A.B.W. - nr.	p	2	79/80

2) Zie noot 2) onder het vorige schema.

Indien de factor $\frac{(t-\bar{t})}{\sqrt{\Sigma(t-\bar{t})^2}} = T$ wordt gesteld, dan kan dus van te voren een stel kaarten worden gereed gemaakt met de waarden T_i, passende bij een bepaald bemestingspatroon, voor elke te kiezen waarde van c één. In deze kaarten kan alles, wat in de met 2) gemerkte kolom met p is aangeduid, vooraf worden geponst.

Stel nu, dat voor een bepaald proefveld geheel onbekend is welke waarde c zal blijken te bezitten, behalve dat bijv. zal gelden: $0 < c < 1$. Dan worden de bij het bemestingspatroon van de proef behorende tien functiekaarten

- genomen -

genomen met de waarden van c lopende van 0,1 t/m 1,0. Met de proefveldkaart vóórop gaan deze kaarten in de rekenende machine, die nu per kaart de som $\Sigma T_i y_i$ uitrekent; de getallen y_i treden op als vermenigvuldigers en de proefveldkaart wordt dan ook in ponskaartentechnische zin als "moeder"kaart gebruikt. Daarbij wordt telkens eerst $T_1 y_1$ bepaald, vervolgens $T_2 y_2$ enz. t/m $T_5 y_5$, waarna de machine de som in de kaart ponst en met dezelfde vermenigvuldigers y_1 t/m y_5 aan de tweede kaart begint. Het gehele werk aan de tien kaarten zal ongeveer 2 minuten vergen.

Zou nu nog een tweede proefveld volgen, dan zou de machine automatisch op de nieuwe vermenigvuldigers y_1 t/m y_5 overgaan en opnieuw beginnen. Een reeks proefvelden van willekeurige lengte kan zodoende zonder ingrijpen van de bedienende persoon automatisch naar dezelfde regels worden afgewerkt.

Het komt er vervolgens op aan voor elk proefveld afzonderlijk te zien bij welke c de maximale waarde van U ongeveer ligt. Daarvoor is nodig de kaarten te doen uitschrijven door een tabelleermachine. Aan de volgorde der kaarten behoeft niets te worden veranderd. De machine schrijft naast elkaar uit:

Proefveldnummer (veld 3),
c (veld 12),
$\Sigma T_i y_i = U$ (veld 13),

waardoor het mogelijk wordt de uitkomsten te inspecteren en de maximale waarde van U op te zoeken. Is dit geschied, dan zal het nodig zijn de berekening te herhalen met waarden van c in twee decimalen in de buurt van de waarde van c, waarbij het maximum van U lag.

De pakjes van 10 functiekaarten voor c van 0,1 t/m 1,0 worden nu vervangen door pakjes kaarten met c-waarden in twee decimalen. Voor elke proef kan het gebied, dat c moet bestrijken verschillend zijn naar middelpunt en breedte. Voor de ene proef moet c bijv. lopen van 0,20 t/m 0,45, voor een andere van 0,50 t/m 0,70 enz. De berekening wordt nu herhaald.

Na de hernieuwde berekening van U worden de resultaatkaarten weder uitgeschreven; nu worden ook de waarden

$1/\sqrt{\Sigma(t - \bar{t})^2}$ (veld 10) en

$\bar{t}$ (veld 11)

mede uitgeschreven, want na deze tweede stap is zeer waarschijnlijk de nauwkeurigheid van de uitkomst reeds voldoende.

De tabulatorstaat gaat nu naar de rekenkamer, waar met de waarden van de velden 10 en 11 en met de maximale waarde van U voor elke proef a en b uit de vergelijking der Mitscherlichkromme worden bepaald.

De lezer zal hebben opgemerkt, dat het nodig is voor elke proef een stel functiekaarten gereed te hebben, opdat daarin de waarde van U kan worden geponst. Deze kaarten kunnen naar één of naar enkele modellen (verschillende bemestingspatronen) telkens opnieuw machinaal worden gereproduceerd.